KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM MENADŽMENTU

predavanja 2017/18

ELEMENTI KOMBINATORIKE

1. Permutacije
2. Varijacije
3. Kombinacije

Preuzeto od : Vera Čuljak: VJEROJATNOST I STATISTIKA, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2011

P1-pomocni materijal

PERMUTACIJE: uređena n-torka od svih raspoloživih elemenata skupa

A. bez ponavljanja:

- *Neka skup S ima n različitih elemenata. Svaka uređena n-torka elemenata skupa S zove se* ***permutacija bez ponavljanja*** *skupa S.* Ukupan broj permutacija je:

  P(n)=n!
- obrazlozenje: (prvi element možemo izabrati na *n* načina, drugi možemo izabrati na *(n - 1)* načina, treći na (*n - 2)* načina itd
- Primjer: Koliko ima svih četvorocifrenih brojeva sastavljenih od cifara skupa S={1,2,3,4} takvih da se cifre ne ponavljaju?
- Rješenje – permutacije bez ponavljanja: n!=4!=4*3*2*1=24

PERMUTACIJE: uređena n-torka od svih raspoloživih elemenata skupa

B. sa ponavljanjem:

- *Neka skup S ima n elemenata od kojih je n*1 *jedne vrste, n*2 *druge vrste, nk k-te vrste, n* = *n*1 + *n*2 + ... + *nk*: *Uređena n-torka elemenata skupa S zove se* ***n-člana permutacija s ponavljanjem***. Broj *n*-članih permutacija s ponavljanjem je:

$$Psa\ ponavljanjem_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

- obrazlozenje: Pretpostavimo da su svi elementi u permutaciji sa ponavljanjem različiti i da imamo permutaciju bez ponavljanja od *n* elemenata. Ukupan broj tih permutacija je n!. U permutaciji s ponavljanjem možemo zamijeniti mjesta na kojima su elementi prve vrste na *n*1! načina i pri tom se permutacija neće promijeniti. Slično zaključujemo i za elemente druge, ..., k-te vrste. Za svaku permutaciju s ponavljanjem postoji *n*1!*n*2!.....*nk*! permutacija bez ponavljanja u kojima se ne mijenja poredak različitih elemenata skupa S. Mijenjajući poredak različitih elemenata dobili bismo ukupan broj permutacija bez ponavljanja od *n* elemenata.
- Primjer: Koliko ima svih četvorocifrenih brojeva sastavljenih od cifara skupa S={1,2,3} ako je dozvoljeno da se cifra 1 ponovi 2 puta?
- Rješenje – permutacije sa ponavljanjem:

P4(2,1,1)= n!/n1!n2!n3!=(2+1+1)!/2!1!1!=24/2=12

VARIJACIJA: uređena r-torka od nekih raspoloživih elemenata skupa

***A. bez ponavljanja**:*

- *Neka skup S ima n različitih elemenata. Uređena r-torka ($r \le n$) elemenata skupa S zove se **varijacija r-tog razreda od n elemenata**.* Broj svih varijacija *r*-tog razreda od *n* elemenata je:

$$V_n^{(r)} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- obrazloženje: Prvi element možemo izabrati na *n* načina, drugi možemo izabrati na (*n*-1) načina, treći na (*n*-2) načina, *r*-ti na (*n-r* +1) način, odnosno to je jednako:

  n(n-1)(n-2)...(n-r+1)[((n-r)(n-r-1)...1)/((n-r)(n-r-1)...1)]=n!/(n-r)!

- Primjer: Koliko ima svih trocifrenih brojeva sastavljenih od cifara skupa S={1,2,3,4} takvih da se cifre ne ponavljaju ?
- Rješenje – varijacije bez ponavljanja: n!/(n-r)=4!/(4-3)!=24

VARIJACIJA: uređena r-torka od nekih raspoloživih elemenata skupa

B. sa ponavljanjem:

- *Neka skup S ima n različitih elemenata. Uređena r-torka elemenata n-članog skupa S , ali tako da se elementi mogu i ponavljati (r može biti i veće od n) zove se* ***varijacija s ponavljanjem r-tog razreda od n elemenata****.*

$$Vsa\ ponavljanjem_n^{(r)} = n^r$$

- obrazlozenje: prvi element možemo izabrati na *n* načina, drugi možemo izabrati na *n* načina, treći na *n* načina, itd., *r*-ti na *n* načina jer je dozvoljeno ponavljanje elemenata iz skupa S.
- Primjer: Koliko ima svih trocifrenih brojeva sastavljenih od cifara skupa S={1,2,3,4} takvih da se cifre ponavljaju ?
- Rješenje – varijacije sa ponavljanjem: $n^r=4^3=64$
- Primjer:*Listić sportske prognoze ima 10 parova. Svaki par može dobiti oznaku 0,1 ili 2 (poraz, neriješeno,pobjeda domaćina). Koliko listića treba ispuniti da bi sigurno jedan listić bio dobitni?*
- Rješenje: *S* = {0; 1; 2} ; *n* = 3. Listić je varijacija s ponavljanjem *r* = 10-og razreda od *n* = 3 elementa. Broj varijacija je $3^{10}=59049$

KOMBINACIJE: r-torka od nekih raspoloživih elemenata skupa (nije važan raspored)

A. bez ponavljanja:

- *Neka skup S ima n različitih elemenata. Svaki r-člani podskup (r ≤n) (redoslijed elemenata u skupu nije bitan) n-članog skupa S zove se* ***kombinacija r-tog razreda od n elemenata***. Broj svih kombinacija *r*-tog razreda je od *n* elemenata je

$$C_n^{(r)} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{V_n^{(r)}}{r!}$$

- obrazlozenje: Budući da u *r*-članom skupu redoslijed nije bitan onda broj uređenih *r*-torki od *n* elemenata moramo podijeliti s brojem permutacija *r*-članog skupa. Prvi element možemo izabrati na *n* načina, drugi možemo izabrati na (*n*-1) načina, treći na (*n*-2) načina, *r*-ti na (*n*-*r*+1) način.
- Primjer: *Loto ima 39 brojeva. Izvlači se slučajno 7 brojeva. Koliko različitih listića s kombinacijama 7 brojeva treba ispuniti da se dobije sigurna sedmica?*
- Rješenje: *S* = {1; 2; 3; ....; 39}, *n* = 39. Listić je kombinacija 7-og razreda (*r* = 7) od 39 elemenata. Broj kombinacija je

$$C_{39}^{(7)} = \binom{39}{7} = \frac{39!}{7!\,(39-7)!} = \frac{39!}{7!\,32!} = \frac{39\cdot 38\cdot 37\cdot 36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32!}{7!\cdot 32!}$$
$$= \frac{39\cdot 38\cdot 37\cdot 36\cdot 35\cdot 34\cdot 33}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 15380937$$

KOMBINACIJE: r-torka od nekih raspoloživih elemenata skupa (nije važan raspored)

B. sa ponavljanjem:

- *Neka skup S ima n različitih elemenata. Svaki r-člani podskup n-članog skupa S gdje se elementi mogu i ponavljati (redoslijed elemenata u r-torci nije bitan) zove se* ***kombinacija s ponavljanjem r-tog razreda od n elemenata****.* Broj svih kombinacija s ponavljanjem *r*-tog razreda od *n* elemenata je:

$$Csa\ ponavljanjem_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$$

- Primjer: Iz kutije u kojoj je 6 kuglica različite boje izvlačimo tri kuglice jednu po jednu s vraćanjem. Koliko uzoraka možemo dobiti ako redoslijed nije važan?
- Rješenje**:** kombinacije sa ponavljanjem (redosled nije bitan, a izvlace se samo 3 kuglice koje se vracaju svaki put posle izvlacenja)

$$Csa\ ponavljanjem_6^{(3)}$$

PODSJEĆANJE

BEZ PONAVLJANJA

broj permutacija od n elemenata	$P(n) = n!$
broj varijacija $r-$tog razreda od n elemenata	$V_n^{(r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$
broj kombinacija $r-$tog razreda od n elemenata	$C_n^{(r)} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$

S PONAVLJANJEM

br. permutacija s pon. od n el.	$\overline{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$
br. varijacija s pon. $r-$tog raz. od n el.	$\overline{V}_n^{(r)} = n^r$
br. kombinacija s pon. $r-$tog raz. od n el.	$\overline{C}_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r}$

PODSJEĆANJE

IZBOR - s vraćanjem

IZBOR: r-čl. uzorka iz n-čl. skupa različitih elemenata	
nije važan poredak	$\overline{C}_n^{(r)}$
važan poredak	$\overline{V}_n^{(r)}$

IZBOR - bez vraćanja

IZBOR: r-čl. uzoraka iz n-čl. skupa različitih elemenata	
nije važan poredak	$C_n^{(r)}$
važan poredak	$V_n^{(r)}$